ÅBO AKADEMI
TEKNISKA FAKULTETEN
TORE GUSTAFSSON

Tentamen i MATEMATIK IV: Numeriska metoder (419104), 9.9.2009

Tillåtna hjälpmedel: Kalkylator, Konstantsamlingen (TEFYMA el. dyl.), Pentikäinen: *Matematiikan kaavoja*, Spiegel: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, Gustafsson: *Ingenjörsmatematisk formelsamling* och Periodiska systemet samt kompendiet ”*Matematik IV – Numeriska metoder*.
Obs! Föreläsningsanteckningar får inte medtas. Studenten får behålla uppgiftstexten.

1. Bestäm grova approximationer till alla reella rötter till ekvationen

$$x^3 + 0,5x^2 + 2,2x = 1 .$$

   a) Bestäm sedan den största reella roten med 3 korrekta decimaler genom iteration. Redogör i detalj för iterationsförfarandet.
   b) Uppskatta en felgräns för den erhållna roten ifall koefficienterna för x^2- och x-termerna anses vara givna med endast en decimals noggrannhet, d.v.s. avrundade till en decimal.

2. Vi har givet det överbestämda ekvationssystemet till höger, där alla talvärden anses vara exakta. Har ekvationssystemet exakta lösningar, och i så fall hur många? Bestäm ekvationssystemets exakta lösning (lösningar) om en sådan (sådana) existerar eller bestäm en approximativ lösning om ekvationssystemet inte har exakta lösningar. Motivera i så fall varför denna approximativa lösning skulle vara en bra approximation. Redogör i detalj för alla beräkningar.

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,2x_2 = 1,1 \\ 0,5x_1 + 0,6x_2 = 2,9 \\ 0,6x_1 + 2x_2 = 5,2 \end{cases}$$

3. Bestäm numeriskt derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\ln(3+x)}{\sin x}$$

   i x = 0,5 med 5 signifikanta siffror. Använd differenskvoter med Richardsonextrapolation. Visa med hjälp av teorin för Richardsonextrapolation att önskad noggrannhet uppnåtts.

4. Beräkna med Rombergs metod integralen

$$Q = \int_0^b \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x ,$$

   där övre integrationsgränsen är känd som ett närmevärde, b = 0,80 ± 0,01. Ge svaret med en motiverad felgräns. Redogör för alla beräkningssteg. Använd endast numeriska metoder för såväl integral som felgräns. Utnyttja inte eventuell kunskap om integralens analytiska lösning.

5. Funktionerna $y(t)$ och $z(t)$ bestäms av ekvationssystemet

$$\begin{cases} y'' - z = t \\ z' - yz = 0 \end{cases} \quad \text{med begynnelsevärdena} \quad \begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 1 \\ z(1) = 1 \end{cases} .$$

   Skriv systemet i standardformen för lösning med 4:e ordningens Runge-Kutta-metoden i kompendiet eller med Eulers metod. Visa sedan hur problemet kan lösas genom att göra två steg med Eulers metod med steglängden h = 0,2.