

TENTAMEMEN I MATEMATIK IV, 5.3.2003.
LÖSNINGAR (kompletterade 14.9.2005)

1. a) Utveckla determinanten:

$$A = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left\{ x_1 \begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \{ x_1(y_2 - y_3) - x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_1 - y_2) \}$$

Tillämpa felfortplantningsformeln:

$$E_A = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| E_{x_1} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| E_{x_2} + \left| \frac{\partial f}{\partial x_3} \right| E_{x_3} = \frac{1}{2} \{ |y_2 - y_3| + |y_1 - y_3| + |y_1 - y_2| \} E_x$$

b) Approximationsfelet kallas trunkationsfel därför att den givna approximationen för drivatan är en trunkerad potensserie. Vi kan lösa problemet på två sätt:

1° Bestäm McLaurinserien för $\arctan(x)$, derivera den och jämför med den givna approximationen.

$$f(x) = \arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$$

Exakta trunkationsfelet är således $e_T = -x^6 + x^8 - x^{10} + \dots$.

Potensserien är alternerande varför den första bortlämnade termen duger som felgräns. Kontrollera för vilka x -värden det absoluta värdet av den första bortlämnade termen överstiger den tillåtna felgränsen för 4 decimalers noggrannhet:

$$E_T = x^6, \quad E_T \leq 0,00005 \text{ ger } x^6 \leq 0,00005 \text{ eller } |x| \leq 0,1919. \quad \text{Svar: } \underline{|x| \leq 0,19}$$

2° Bestäm derivatan av $\arctan(x)$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Bilda approximationsfelet som skillnaden mellan den exakta derivatan och den givna approximationen,

$$e_T = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4.$$

Kontrollera för vilka x -värden det absoluta värdet av approximationsfelet överstiger den tillåtna felgränsen för 4 decimalers noggrannhet:

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 \right| \leq 0,00005$$

Olikheten torde enklast lösas genom prövning. Den ger lösningen $\underline{|x| \leq 0,193}$.

2. Alt.1. Dela upp integralen i två integraler: $I = \int_0^{0,88} f(x) dx = \int_0^{0,80} f(x) dx + \int_{0,80}^{0,88} f(x) dx = I_1 + I_2$.

I_1 bestäms lämpligen med Rombergs metod som även ger en feluppskattning:

h	$T(h)$	$\Delta/3$	$S(h)$	$\Delta/15$	$R_2(h)$
0,8	0,51524				
0,4	0,51978	0,001513			
0,2	0,52089	0,00037	0,521293	-0,0000022	0,521258
0,1	0,521165	0,000092	0,521260	-0,0000002	0,521257
		OK! minskar till 1/4		OK! minskar till $\approx 1/16$	

vänd!

Rombergs metod ger svaret ur kolumnen $R_2(h)$: $I_1 = 0,521257$. Det ser ut som om vi skulle ha 5 korrekta decimaler. Emellertid är de ursprungliga funktionsvärdena avrundade till 4 decimaler, varför vi knappast vågar ge en felgräns mindre än 0,00005.

$$I_1 = 0,52126 \pm 0,00005$$

I_2 kan bestämmas genom integrering av ett kvadratisk interpolationspolynom. Vi använder t.ex. Newtons framåttdifferensformel. Vi ställer först upp ett framåttdifferensschema.

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0,6	0,7257			
0,7	0,7580	0,0323		
0,8	0,7881	0,0301	-0,0022	
0,9	0,8159	0,0278	-0,0023	-0,0001
1,0	0,8413	0,0254	-0,0024	-0,0001

Vi får interpolationspolynomet

$$f(x) \approx p_2 = 0,7881 + t \cdot 0,0278 - \frac{t(t-1)}{2} \cdot 0,0024$$

med en felgräns $E_{f_2} = \left| \frac{\Delta^3}{15} \right| = \frac{0,0001}{15} = 0,00001$.

Vid integrationen byter vi integrationsvariabel från x till t : $x = x_0 + th$, $dx = hdt$,
 $x = 0,80 \Leftrightarrow t = 0$, $x = 0,88 \Leftrightarrow t = 0,8$.

$$I_2 = \int_{x=0,80}^{x=0,88} f(x) dx \approx \int_{t=0}^{t=0,8} p_2(t) h dt = 0,1 \int_0^{0,8} \left\{ 0,7881 \cdot t + 0,0278 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 \right) \cdot 0,0024 \right\} dt = 0,0641168.$$

Felgräns för I_2 : Vi approximerar t.ex. felet som bredden över integrationsintervallet gånger felgränsen för funktionsvärdet, $E_{I_2} = 0,08 \cdot E_{f_2} = 0,0000006$, men avrundningsfelet i de ursprungliga funktionsvärdena är betydligt större. Vi summerar

$$\text{Svar: } I = 0,5854 \pm 0,00005$$

Alt.2. Bestäm interpolerade värden för $f(0,11)$, $f(0,22)$, $f(0,44)$, $f(0,55)$, $f(0,66)$, $f(0,77)$ och $f(0,88)$. Integrera sedan med Rombergs metod med steglängderna $h = 0,88; 0,44; 0,22$ och $0,11$. Vid feluppskattningen bör man även ta i beaktande interpolationens feluppskattning, ty interpolationen kan ge ett systematiskt fel i integralens värde som inte syns i Romberg-metodens normala feluppskattning.

3. Tabellerna är inte ekvidistanta. Vi ställer upp differensscheman med dividerade differenser för vardera tabellen. Därefter beräknas felgränser med formeln $E_1(x) = |(x - x_0)(x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2]|$, där vi för storheten $f[x_0, x_1, x_2]$ använder det till beloppet största värdet i intervallet $[x_0; x_1]$.

Tabell 1:

ν	F	$f[\nu_0, \nu_1]$	$f[\nu_0, \nu_1, \nu_2]$
20	1,937	-0,0118	
30	1,819	-0,0056	0,00031
40	1,763	-0,0028	0,0000933
60	1,707	-0,00092	0,0000235
120	1,652		

Enligt teorin för felgränser vid interpolation torde det största felet påträffas mitt i något av intervallen. Vi bestämmer en felgräns för interpolation mitt i varje intervall mellan $\nu = 30$ och $\nu = 60$:

$$E_1(35) = 5 \cdot 5 \cdot 0,00031 = 0,00775$$

$$E_1(50) = 10 \cdot 10 \cdot 0,0000933 = 0,00933$$

Detta ger en felgräns $E_1 = 0,01$ (avrundat uppåt till en signifikant siffra).

Tabell 2:

$x = 1/\nu$	F	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
1/20	1,937	7,08	
1/30	1,819	6,72	14,4
1/40	1,763	6,72	0
1/60	1,707	6,60	7,2
1/120	1,652		

Enligt teorin för felgränser vid interpolation torde det största felet påträffas mitt i något av intervallen. Vi bestämmer en felgräns för interpolation mitt i varje intervall mellan $\nu = 30$ och $\nu = 60$:

$$E_1(0,03) = 0,0042 \cdot 0,0042 \cdot 14,4 = 0,000254$$

$$E_1(0,0208) = 0,0042 \cdot 0,0041 \cdot 7,2 = 0,000124$$

Detta ger en felgräns $E_1 = 0,0003$ (avrundat uppåt till en signifikant siffra), men avrundningsfelet i F är ju större än så, varför vi sätter felgränsen till avrundningsfelet $E_1 = 0,0005$.

Slutresultat. Linjär interpolation i tabell 1 i intervallet $\nu \in [30; 60]$ har en felgräns 0,01.

Linjär interpolation i tabell 2 i intervallet $\nu \in [30; 60]$ har en felgräns 0,0005.

I det senare fallet beaktar vi alltså att interpolationen inte kan ge ett noggrannare värde än tabellvärdet som är avrundat till 3 decimaler.

4. Ställ upp ett ekvationssystem genom att sätta in givna data i modellen:

$$0,3068 = 0,2163 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$0,1988 = 0,3068 \cdot a - 1 \cdot b, \quad \text{etc.}$$

Det finns data för 4 ekvationer. Ekvationssystemet blir i matrisform:

$$\begin{bmatrix} 0,2163 & 1 \\ 0,3068 & -1 \\ 0,1988 & 1 \\ 0,0903 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3068 \\ 0,1988 \\ 0,0903 \\ 0,2042 \end{bmatrix}$$

$A \quad c \quad f$

Vi löser ekvationen i minstakvadratavseende genom att bilda normalekvationen $A^T A c = A^T f$,

$$\begin{bmatrix} 0,1886 & -0,199 \\ -0,199 & 4 \end{bmatrix} c = \begin{bmatrix} 0,1637 \\ 0,2219 \end{bmatrix},$$

som löses t.ex. med gausselimination.

Svar: $a = 0,98$, $b = 0,10$

5. a) En andra ordningens differentialekvation skrivs som ett system av två första ordningens differentialekvationer genom att definiera att $y_1(t) = y(t)$ och $y_2(t) = y'(t)$.

Integralen överförs i en differentialekvation genom derivering.

$$\frac{dz}{dt} = y^2 + (y')^2$$

Begynnelsevärdet fås ur integralen,

$$z(1) = \int_1^1 (y^2 + (y')^2) dt = 0$$

Den resulterande differentialekvationen kombineras med det tidigare systemet av differentialekvationer genom att definiera $y_3(t) = z(t)$,

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2 - y_1 + \sin t \\ y_3' = y_1^2 + y_2^2 \end{cases}$$

Systemet av första ordningens differentialekvationer slås ihop till en vektoriell differentialekvation $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ med begynnelsevärde $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(1)$,

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_2 - y_1 + \sin t \\ y_3' = y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}(t, \mathbf{y})}, \quad \mathbf{y}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Runge-Kutta av 4:e ordningen har ett globalt fel som är proportionellt mot steglängden i 4:e potens:

$$e_T \approx k \cdot h^4, \quad (1)$$

eller vid två olika steglängder

$$\frac{e_{T1}}{e_{T2}} \approx \frac{h_1^4}{h_2^4} \quad (2)$$

Antag att det korrekta värdet i $t = 2$ är $z(2)$. Då kan vi proportionera

$$\frac{0,8631 - z(2)}{0,8892 - z(2)} \approx \frac{1^4}{0,5^4}$$

Härur kan vi uppskatta $z(2) \approx 0,89094$, varefter proportionalitetskonstanten uppskattas ur ekv (1), $k = 0,02784$.

Den behövliga steglängden uppskattas likaså ur (1). Då vi tillåter en felgräns, $e_T = 0,0005$, får vi den

största tillåtna steglängden som $h = \left(\frac{0,0005}{0,02784} \right)^{1/4} = 0,366$.