ÅBO AKADEMI
TEKNISKA FAKULTETEN
TORE GUSTAFSSON

MATEMATIK III, 31.1.2007 LÖSNINGSANVISNINGAR

1. Konstanten c kan bestämmas ur egenskapen att $p(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Väntevärdet bestäms sedan ur definitionen $\mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x$ och medianen m ur definitionen $F_X(m) = \frac{1}{2}$, där fördelningsfunktionen fås ur definitionen $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Beteckna s.v. X_i: massan av enhet i, $X_i \in N(\mu_X, \sigma_X)$. S.v. Y: massan i en förpackning. Modell: $Y = \sum_{i=1}^{10} X_i \in N(\mu_Y, \sigma_Y)$. Bestäm väntevärde och standardavvikelse för Y enligt reglerna för summor av obereoende stokastiska variabler. Beräkna sedan sannolikheten $p(Y < 500)$ (= $p(Y \leq 500)$).

3. Definiera en s.v. X som "antal sålda tidningar", $X \in Bin(n, p)$ med $n = 200$, $p = 0{,}8$.
   Definiera en s.v. Y som "lön per dag", $Y = (20 + X \cdot 0{,}2)$€. Fördelning: ingen sedvanlig fördelning.
   a) Bestäm väntevärde och varians för X enligt teorin för binomialfördelning. Bestäm sedan väntevärde och varians för Y enligt teorin om väntevärde och varians för linjära funktioner av stokastiska variabler.
   b) Bestäm $p(Y < 50€)$. Lös hellre det ekvivalenta problemet: $p(X < 150) = p(X \leq 149)$ (X antar endast heltalsvärden). P.g.a. $n = 200$ är det lämpligt att approximera binomialfördelningen. Pröva om normalapproximation eller poissonapproximation är lämplig. Approximationen måste alltid motiveras med villkoren i teorin (formelsamlingen).

4. Vi har parvisa data. Alltså beräknar vi först tidsvinsten för varje person. Sedan bestämmer vi medelvärde och stickprovsstandardavvikelse för tidsvinsterna, bildar medelfelet och bestämmer ett dubbelsidigt konfidensintervall. Observera att väntevärdet är okänt, varför vi använder t-fördelningens kvantil för konfidensintervallet. Hypotesprövningen görs direkt på basen av konfidensintervallet: om konfidensintervallet innesluter värdet 3 min kan nollhypotesen inte förkastas. Annars förkastar vi nollhypotesen. Formuleringen med nollhypotes och alternativ hypotes betyder bara att hypotesprövningen skall göras på basen av ett dubbelsidigt konfidensintervall.

5. Bestäm medelvärden ($\bar{x}_m$ och $\bar{x}_a$) och stickprovsstandardavvikelser (s_m respektive s_a) för vartdera stickprovet.
   a) Testa hypotesen $H_0 : \sigma_m^2 > \sigma_a^2$ med hjälp av F-fördelningen. Hypotesen accepteras om $\frac{s_a^2}{s_m^2} > F_{0{,}05}(6;17)$. Den behövliga F-fördelningens kvantil, $F_{0{,}05}(6;17)$, finns inte i tabellen i formelsamlingen. Vi använder lämpligen linjär interpolation för att få fram värdet.
   b) Om hypotesen i fall a inte kan förkastas, kan man här anta att $\sigma_m = \sigma_a$.
   Testa hypotesen $H_0 : \mu > 0$, där $\mu = \mu_m - \mu_a$. Bestäm medelfel och frihetsgrader för skattningen $\bar{x}_m - \bar{x}_a$ av $\mu_m - \mu_a$ enligt teorin för skattning av skillnad mellan väntevärden.

Statistik på basen av 13 inlämnade prov:

Uppgift	1	2	3	4	5	Σ
max. poäng	6	6	6	6	6	30
medeltal	2,3	4	3	1,7	2,1	13,1
median	1	6	3	0,5	1	13

För godkänt fordras 14 poäng